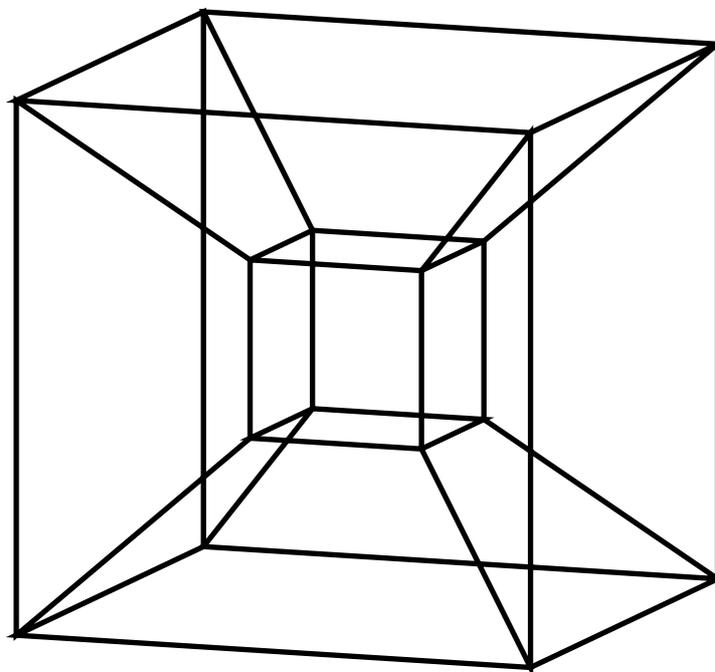


Symmetriegruppen von Würfeln und Tetraedern in zwei, drei und mehr Dimensionen

Maturaarbeit von
Cedric Lehr

betreut durch
Christian Feld

korreferiert durch
Vincenzo Ignazio



Kantonsschule Menzingen KSM

7. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	4
Vorwort	5
Einleitung	6
Nomenklatur	7
1. Symmetrieoperationen in 2D	8
1.1. Symmetriegruppe des Dreiecks	8
1.2. Symmetriegruppen von Polygonen	12
1.2.1. Symmetrieoperationen als Teilmenge der Permutationen	12
1.2.2. Anzahl Symmetrien von Polygonen	13
1.2.3. Diedergruppen	16
2. Symmetrieoperationen in 3D	18
2.1. Symmetriegruppe des Tetraeders	18
2.2. Symmetriegruppe des Würfels	20
3. Symmetrieoperationen in mehr als 3 Dimensionen	22
3.1. Orientierung von mehrdimensionalen Figuren	22
3.2. Symmetriegruppen von "Hypertetraedern"	23
3.2.1. Das Simplex	23
3.2.2. Anzahl Symmetrien des Simplex	24
3.3. Symmetriegruppen von Hyperwürfeln	25
3.3.1. Der Hyperwürfel	25
3.3.2. Anzahl Symmetrien des Hyperwürfels	25
Ausblick	29
Literatur	30
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	31
Anhang I. Symmetriegruppen und Matrizen	32
I.1. Dreh- und Spiegelungsmatrizen in 2D	34
I.2. Orientierung von Symmetrieoperationen	36

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Symmetrieoperationen von verschiedenen Figuren in verschiedenen Dimensionen untersucht. Der Begriff einer Gruppe wird definiert und es werden anhand von Beobachtungen in den uns bekannten Dimensionen 0D, 1D, 2D und 3D Voraussagen für mehrdimensionale Figuren getroffen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Simplex und dem Hyperwürfel, es werden aber auch im zweidimensionalen regelmäßige Polygone untersucht. Die Untersuchungen bestehen grösstenteils aus Menge und Art der Symmetrieoperationen, sowie der Anzahl an Eckpunkten verschiedener mehrdimensionaler Figuren.

Vorwort

Der Mathematikunterricht der siebten und achten Klasse bei Herrn Christian Feld war sehr inspirierend für mich und eröffnete mir viele neue Türen und Blickwinkel auf die faszinierende Welt der Mathematik. Diese beiden Jahre prägten mein Interesse an der Mathematik sehr stark und bewegten mich schlussendlich auch dazu, diese Arbeit zu schreiben.

Den ersten Kontakt mit Strukturen in mehr als drei Dimensionen hatte ich in der achten Klasse im Mathematikunterricht bei Herrn Feld; im Zusammenhang mit Teilergraphen. Eine Mitschülerin, Annabelle Amiet, und ich forderten uns während dieser Zeit regelmässig gegenseitig heraus indem wir uns "Mathe-Challenges" widmeten, in denen wir uns schwierige Aufgaben stellten und versuchten, diese schneller als die andere Person zu lösen. Eine dieser eigenen Challenges war es, einen 5D-, 6D-, oder sogar 10D-Würfel zu zeichnen. Beim 5D-Würfel war Annabelle schneller, beim 6D-Würfel sind wir uns bis heute noch nicht einig, und der 10D-Würfel ist mir mithilfe eines Computerprogramms als erstes gelungen.

Schon damals war die Welt mit mehr als drei Dimensionen ein grosses Mysterium für mich, das mich sehr interessiert und fasziniert hat. Und doch war diese Welt immer fern und nicht vorstellbar. Mit dieser Arbeit bin ich diesen Mysterien ein wenig näher getreten.

An dieser Stelle möchte ich mich sowohl bei Annabelle als auch bei Herrn Feld für diese inspirierende Zeit bedanken. Ein weiterer wichtiger Dankesruf geht hier an meine Familie, die mich während des ganzen Prozesses dieser Maturaarbeit unterstützt und motiviert hat.

Einleitung

Die in dieser Arbeit bearbeiteten Themen werden grösstenteils im ersten Studienjahr des Mathematikstudiums erarbeitet. Die ganze Arbeit basiert ausschliesslich auf dem Buch *Elementar(st)e Gruppentheorie* von Tobias Glosauer, in welchem die Gruppentheorie anhand einfacher Polygone eingeführt wird. Dieses Werk wird in Absprache mit der Betreuungsperson im Verlaufe der Arbeit nicht jedes Mal zitiert. Alle darüber hinausreichenden Erkenntnisse aus dieser Arbeit sind das Produkt intensiven Bearbeitens dieses Themas und wurden vom Autor selbst hergeleitet und erklärt.

▮ Besondere Eigenleistungen sind dabei mit Ecken-Markierungen gekennzeichnet. Sämtliche Graphiken wurden ebenfalls alle eigens für diese Erläuterungen vom Autor selbst produziert. ▮

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, diese Erkenntnisse anschaulich zu beschreiben und für den durchschnittlichen Gymnasiasten zugänglich zu machen. Dabei werden viele Konzepte im null- bis dreidimensionalen Raum ausführlich beschrieben und erklärt und Methoden aufgestellt, um diese Konzepte für beliebige Dimensionen zu erweitern.

Nomenklatur

id	Identitätsoperation
r	Rotation
R	Rotationsachse
σ	Spiegelung
ζ	Spiegelungsachse
\star	Allgemeine Verknüpfung zweier Elemente
\circ	Verknüpfung zweier Elemente: hintereinander Ausführen zweier Elemente (zuerst rechts, dann links) / Komposition
$\triangle ABC$	Dreieck mit den Ecken A , B und C
$\square ABCD$	Quadrat mit den Ecken A , B , C und D
θ, φ	beliebige Winkel
(G_k)	Gruppenaxiome
$f(x), g(x), h(x)$	Symmetrieabbildungen
\mathbb{G}	Menge
$ \mathbb{G} $	Mächtigkeit (Anzahl Elemente) einer Menge \mathbb{G}
(\mathbb{G}, \star)	Gruppe mit der Menge \mathbb{G} und der inneren Verknüpfung \star
$\text{ord}(\mathbb{G}, \star)$	Ordnung einer Gruppe (\mathbb{G}, \star)
SD_n	Menge der Elemente der speziellen Diedergruppe, die nur Rotationen enthält
(D_n, \circ)	Diedergruppe der Ordnung $2n$
(S_n, \circ)	Symmetrische Gruppe der Ordnung $n!$
(O_n, \circ)	Hyperoktaedergruppe der Ordnung $2^n \cdot n!$
$\mathbf{R}(\theta)$	Rotationsmatrix um den Winkel θ
$\sigma(\theta)$	Spiegelungsmatrix um die Achse, die einen Winkel θ zur Horizontalen aufweist
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbf{E}_n	$(n \times n)$ -Einheitsmatrix
\mathbf{M}	Beliebige Matrix
$\det(\mathbf{M})$	Determinante der Matrix \mathbf{M}
$[a] \in [b]$	$[a]$ ist ein Element von $[b]$
$[a] \subset [b]$	$[a]$ ist eine Teilmenge von $[b]$
$[a] \cup [b]$	$[a]$ vereinigt mit $[b]$
$[a] \setminus [b]$	$[a]$ ohne $[b]$
$\forall [a] : [b]$	Für alle $[a]$ gilt: $[b]$
$\exists [a] : [b]$	Es existiert (mindestens) ein $[a]$, für welches gilt: $[b]$

1. Symmetrieoperationen in 2D

In diesem Abschnitt werden die Definitionen von verschiedenen Begriffen und deren Anwendung behandelt, um eine Basis im zweidimensionalen Raum zu schaffen, von der aus die hier definierten Konzepte auf höherdimensionale Räume übertragen werden können. Bei den Untersuchungen handelt es sich immer um regelmässige Polygone, ausser es ist explizit anders angegeben.

1.1. Symmetriegruppe des Dreiecks

Definition 1.1:

Unter den Symmetrieoperationen einer Figur versteht man (Kongruenz-)Abbildungen wie Rotationen, Spiegelungen oder Rotationsspiegelungen, welche die Figur auf sich selbst abbilden.

Beispiel 1.1: Ein gleichschenkliges Dreieck besitzt zwei mögliche Symmetrieoperationen (siehe Abb. 1.1):

- 1) die Rotation um 360° um den Punkt M bzw. "nichts machen", was als Identitätsoperation id bezeichnet wird
- 2) die Spiegelung σ um die Symmetrieachse ζ

Die Menge $\mathbb{G}_{gl.sch.}$ der Symmetrieoperationen eines gleichschenkligen Dreiecks lässt sich also wie folgt darstellen:

$$\mathbb{G}_{gl.sch.} = \{id, \sigma\} \quad (1.1)$$

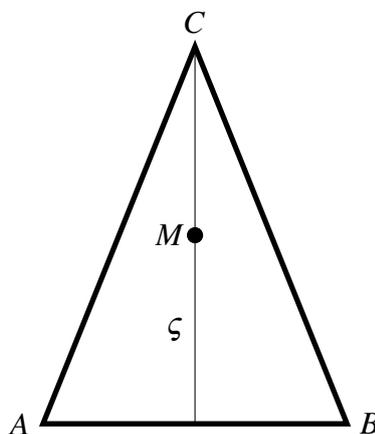


Abbildung 1.1: Symmetrieoperationen eines gleichschenkligen Dreiecks

Beispiel 1.2: Ein gleichseitiges Dreieck besitzt insgesamt sechs verschiedene Symmetrieeoperationen (siehe Abb. 1.2):

1) die Rotation um 360° um den Mittelpunkt M bzw. die Identitätsoperation id (“nichts machen”)

2-3) die Rotationen r_1 und r_2 um den Mittelpunkt M um 120° bzw. 240°

4-6) die Spiegelungen σ_1 , σ_2 und σ_3 an den Achsen ζ_1 , ζ_2 und ζ_3

Es ergibt sich folgende Menge¹ D_3 der Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks:

$$D_3 = \{id, r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad (1.2)$$

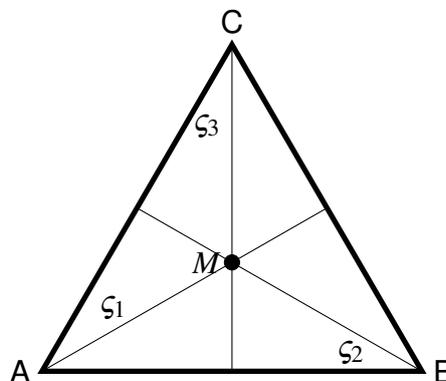


Abbildung 1.2: Symmetrieeoperationen eines gleichseitigen Dreiecks

Wird $r_1 \in D_3$ (vgl. Gleichung (1.2)), die Rotation um den Mittelpunkt M um 120° , zweimal nacheinander ausgeführt, das Dreieck also zweimal um 120° gedreht, so ist dies dasselbe, als hätte man das Dreieck direkt um $240^\circ \hat{=} r_2$ gedreht. Es ergibt sich also:

$$r_1 \circ r_1 = (r_1)^2 = r_2 \quad (1.3)$$

Definition 1.2:

Die Verknüpfung \circ bezeichnet das *hintereinander Ausführen der Operationen* und ist von rechts nach links zu lesen (zuerst die Operation rechts von \circ ausführen, dann die Operation links von \circ). Die Verknüpfung \circ kann auch als *Komposition* zweier Funktionen/Abbildungen $f(x)$ und $g(x)$ definiert werden:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

¹vgl. Diedergruppen in Abschnitt 1.2.3

Diese Reihenfolge, in der die Operationen ausgeführt werden, ist in Gleichung (1.3) allerdings nicht relevant, da auf beiden Seiten r_1 steht. Deshalb kann $r_1 \circ r_1$ auch als $(r_1)^2$ geschrieben werden.

Werden alle Elemente der Menge D_3 wiederum mit sich selbst verknüpft, ergibt sich die Verknüpfungstafel Tabelle 1.1. Hierbei wird zuerst die Operation *oben* und dann die Operation *links* ausgeführt, also $[\text{links}] \circ [\text{oben}]$.

Tabelle 1.1: Verknüpfungstafel der Gruppe (D_3, \circ)

\circ	id	r_1	r_2	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	r_1	r_2	σ_1	σ_2	σ_3
r_1	r_1	r_2	id	σ_3	σ_1	σ_2
r_2	r_2	id	r_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	id	r_1	r_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	r_2	id	r_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	r_1	r_2	id

Der Tabelle 1.1 kann entnommen werden, dass sich aus allen möglichen Verknüpfungen zweier Elemente $(a, b \in D_3)$ wiederum ein Element $c \in D_3$ ergibt. Die Verknüpfung \circ ist also eine *innere Verknüpfung* der Menge D_3 .

Definition 1.3:

Eine (zweistellige) Verknüpfung \star einer Menge \mathbb{G} ist eine *innere Verknüpfung*, wenn gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{G} : (a \star b) \in \mathbb{G}$$

Weiter lässt sich aus Tabelle 1.1 entnehmen, dass die Verknüpfung der Symmetrioperationen nicht immer kommutativ ist:

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = r_1 \neq r_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1 \tag{1.4}$$

Die Reihenfolge, in welcher die Operationen bei der Verknüpfung ausgeführt werden, spielt also eine Rolle.

Weiter sind folgende Eigenschaften aus Tabelle 1.1 erkennbar:

- Es gibt ein *Neutralelement* $id \in D_3$, welches an einem beliebigen Element $a \in D_3$ bei der Verknüpfung nichts ändert:

$$a \circ id = a = id \circ a$$

- Für jedes Element $a \in D_3$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in D_3$, welches bei

der Verknüpfung mit a das Neutralelement id ergibt:

$$a \circ a^{-1} = id = a^{-1} \circ a$$

Aus den anhand von Tabelle 1.1 abgeleiteten Eigenschaften lässt sich die *Gruppe* mit den drei grundlegenden Gruppenaxiomen definieren:

Definition 1.4:

Es sei \mathbb{G} eine Menge, auf der es eine *innere Verknüpfung* \star gibt, die je zwei Elemente aus \mathbb{G} einem Element aus \mathbb{G} zuordnet. Das Paar (\mathbb{G}, \star) ist nun eine Gruppe, wenn folgende *Gruppenaxiome* erfüllt sind:

(G₁) Assoziativität

Die Verknüpfung \star ist assoziativ für alle $a, b, c \in \mathbb{G}$:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{G} : (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

(G₂) Neutralelement

Es gibt ein *Neutralelement* $id \in \mathbb{G}$, welches an einem beliebigen Element $a \in \mathbb{G}$ bei der Verknüpfung nichts ändert:

$$\exists id \in \mathbb{G}, \forall a \in \mathbb{G} : a \star id = a = id \star a$$

(G₃) inverses Element

Für jedes Element $a \in \mathbb{G}$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in \mathbb{G}$, welches bei der Verknüpfung mit a das Neutralelement id ergibt:

$$\forall a \in \mathbb{G}, \exists a^{-1} : a \star a^{-1} = id = a^{-1} \star a$$

Es seien $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ Symmetrieoperationen in D_3 und x die Anordnung des Dreiecks. Aus der Definition der Verknüpfung \circ (vgl. Definition 1.2) ergibt sich, dass die Verknüpfung \circ immer assoziativ ist:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x) \quad (1.5)$$

Das Axiom (G_1) ist somit für D_3 bestätigt.

Die erste Zeile und die erste Spalte in Tabelle 1.1 werden durch die Verknüpfung mit id nicht verändert. Dies bestätigt das Axiom (G_2).

Die Gültigkeit des Axioms (G_3) ergibt sich daraus, dass in Tabelle 1.1 in jeder Zeile und jeder Spalte das Element id vorhanden ist, jedes Element also ein inverses Element besitzt, sodass bei der Verknüpfung mit diesem id entsteht. Ausserdem sind die id -Elemente in Tabelle 1.1 symmetrisch zur Diagonalen angeordnet. Daran sieht man, dass die Verknüpfung auf beide Seiten funktioniert ($a \circ a^{-1} = id = a^{-1} \circ a$).

Das Paar (D_3, \circ) erfüllt also alle Gruppenaxiome und ist somit eine *Gruppe*.

Definition 1.5:

Eine Gruppe (\mathbb{G}, \star) heisst *Symmetriegruppe*, wenn alle Elemente von \mathbb{G} Symmetrieeoperationen sind und die Verknüpfung \star das Hintereinanderausführen zweier dieser Symmetrieeoperationen, also \circ , bezeichnet.

1.2. Symmetriegruppen von Polygonen

Neben dem Dreieck existieren noch weitere (regelmässige) n -Ecke oder *Polygone*, denen ebenfalls Symmetriegruppen zugeordnet werden können. Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass mit "Polygon" immer ein *regelmässiges* Polygon gemeint ist, da dieses die maximale Symmetrie aufweist.

1.2.1. Symmetrieeoperationen als Teilmenge der Permutationen

Um die n Ecken eines n -Ecks anzuordnen, gibt es maximal

$$n! = n \cdot (n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten². Die zu den (regelmässigen) Polygonen gehörenden Symmetriegruppen können also maximal $n!$ Elemente besitzen.

Satz 1.1:

▮ Die maximal mögliche Anzahl Symmetrien einer Figur mit n Ecken entspricht der maximalen Anzahl der möglichen Verteilung der Ecken und beträgt $n!$ ▮

²Für die erste Ecke gibt es n Möglichkeiten, diese zu platzieren, für die zweite noch $n - 1$, die dritte noch $n - 2$ Möglichkeiten usw.

Die Symmetriegruppe des Dreiecks (D_3, \circ) besitzt genau diese maximale Anzahl Elemente $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (vgl. Abschnitt 1.1). Die Symmetriegruppe des Quadrats besitzt allerdings bereits nicht mehr diese maximale Anzahl (also $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$) Elemente.

Von den $4! = 24$ verschiedenen Verteilungen (*Permutationen*) der Ecken gehören gerade einmal *acht* zur Symmetriegruppe des Quadrats. r_k bezeichnet hierbei die Rotation um jeweils 90° um den Mittelpunkt M und σ_k die Spiegelung um die vier Symmetrieachsen des Quadrats (siehe Abb. 1.3a):

$$D_4 = \{id, r_1, r_2, r_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\} \quad (1.6)$$

Definition 1.6:

Eine Permutation $P = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$, welche die Ecken A, B, C , und D vertauscht, wird spaltenweise gelesen:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

Hierbei wird A auf B , B auf A , C auf D und D auf C abgebildet.

Damit eine Permutation der Ecken eines Polygons zu den Symmetriegruppen dieses Polygons gehört, darf es, wenn die Ecken des Polygons in der ursprünglichen Reihenfolge verbunden werden, keine Überkreuzungen der Kanten geben.

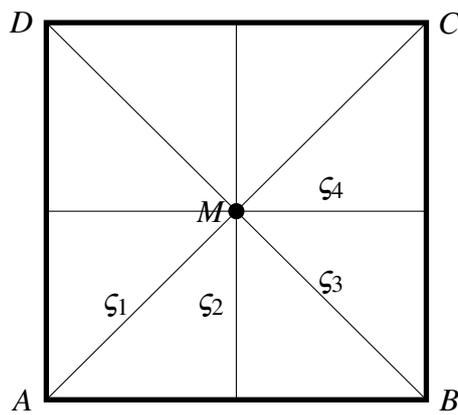
Die Permutation $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$, die einer Spiegelung um ζ_1 entspricht (vgl. Abb. 1.3a), gehört zu den Symmetrieeoperationen des Quadrats, da die Kanten wieder auf dem Quadrat liegen (siehe Abb. 1.3b).

Die Permutation $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}$ platziert die Ecken des Quadrats so, dass sich die Kanten überkreuzen (siehe Abb. 1.3c). Folglich gehört diese Permutation nicht zu den Symmetrieeoperationen des Quadrats.

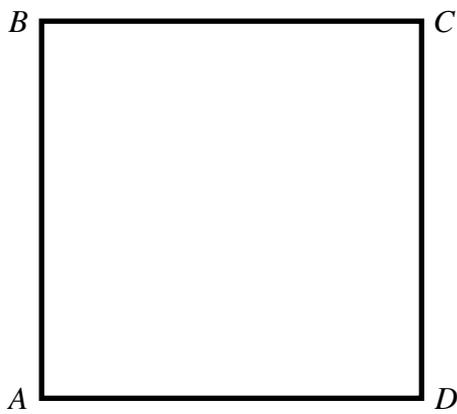
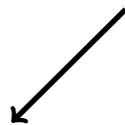
Es gehören also allgemein nicht alle Permutationen der Ecken eines Polygons zu den Symmetrieeoperationen dieses Polygons. Allerdings ist jede Symmetrieeoperation automatisch eine Permutation der Ecken. Die Menge der Symmetrieeoperationen ist also eine *Teilmenge* der Permutationen der Ecken.

1.2.2. Anzahl Symmetrien von Polygonen

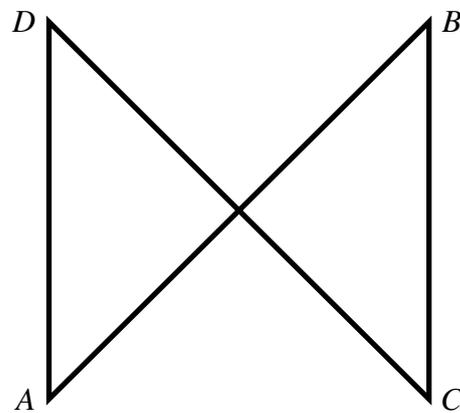
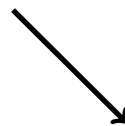
▮ Es seien P_1, P_2, \dots, P_n die Ecken eines regelmässigen n -Ecks in dieser Reihenfolge.



(a) Symmetrieachsen des Quadrats $ABCD$



(b) Quadrat $ABCD$ nach der Anwendung der Symmetriepermutation
 $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}$
 \Rightarrow Symmetrieoperation



(c) Quadrat $ABCD$ nach der Anwendung der Permutation $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}$
 \Rightarrow keine Symmetrieoperation

Abbildung 1.3: verschiedene Arten von Permutationen am Quadrat $\square ABCD$

- Um Punkt P_1 an einer Stelle des n -Ecks zu platzieren, gibt es n Möglichkeiten.
- Um den Punkt P_2 zu platzieren, gibt es noch zwei Möglichkeiten, nämlich auf einer der beiden Seiten neben P_1 .
- Für den Punkt P_3 gibt es noch eine Möglichkeit, diesen zu platzieren, nämlich an der anderen Seite neben P_2 .
- Schliesslich kann P_4 nur noch auf eine Seite von P_3 platziert werden usw.
- Die Position des Polygons ist also nach der Platzierung der ersten beiden Punkte P_1 und P_2 eindeutig festgelegt.
- Insgesamt gibt es also $2 \cdot n$ Möglichkeiten, das Polygon zu platzieren.

Abbildung 1.4 stellt diese Überlegungen nochmals graphisch dar.

Jede Symmetrieoperation eines Polygons platziert das Polygon neu. Daher entspricht die Anzahl Symmetrieoperationen des Polygons der Anzahl Möglichkeiten, dieses Polygon zu platzieren. ┘

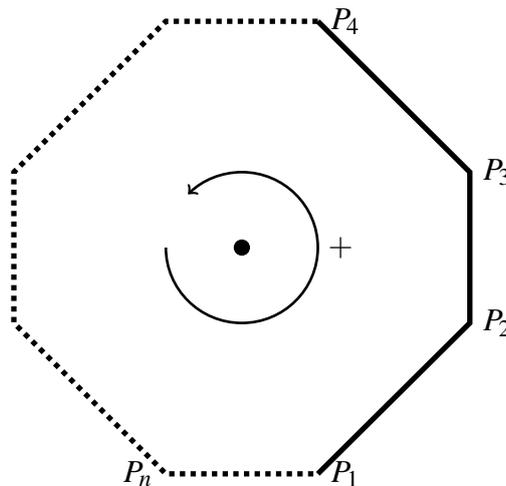


Abbildung 1.4: Möglichkeiten zur Platzierung der Ecken eines Polygons und Definition der Orientierung in 2D

Die *Orientierung* in 2D kann entweder positiv (gegen den Uhrzeigersinn) oder negativ (im Uhrzeigersinn) sein. Die Entscheidung, ob die Ecken des Polygons im oder gegen den Uhrzeigersinn verlaufen, fällt in dem Moment, in dem P_2 neben P_1 platziert wird (siehe Abb. 1.4). Es ist also genau die Hälfte aller Symmetrieoperationen positiv und die andere Hälfte negativ orientiert. Die Orientierung wird im Anhang I.2 genauer erläutert.

Wird die Orientierung von einer Symmetrieoperation verändert (negative Orientierung), ist die Symmetrieoperation eine *Spiegelung*. Bleibt die Orientierung bestehen

(positive Orientierung), ist sie eine *Rotation*.

Satz 1.2:

Ein Polygon mit n Ecken besitzt $2n$ mögliche Symmetrien, wobei davon n orientierungserhaltend und n nicht orientierungserhaltend sind.

1.2.3. Diedergruppen

Definition 1.7:

Die *Ordnung* einer Gruppe (\mathbb{G}, \star) bezeichnet die Anzahl der Elemente in \mathbb{G} :

$$\text{ord}(\mathbb{G}, \star) = |\mathbb{G}|$$

Die Symmetriegruppen von Polygonen, bestehend aus $2n$ Elementen, wobei n der Anzahl Ecken des Polygons entspricht, lassen sich als *Diedergruppen*³ (D_n, \circ) zusammenfassen. Die Ordnung einer Diedergruppe (D_n, \circ) beträgt $2n$.

Anmerkung: *In der Literatur wird die zu einem n -Eck gehörende Diedergruppe oft auch als (D_{2n}, \circ) bezeichnet, was die Ordnung hervorhebt. In dieser Arbeit wird jedoch immer die Schreibweise (D_n, \circ) verwendet.*

Die erste Rotation einer Diedergruppe r_1 entspricht einer Rotation mit einem Winkel von $\frac{360^\circ}{n}$. Jede weitere Rotation kann auch als das mehrfache Hintereinanderausführen dieser ersten Rotation betrachtet werden. So kann die Menge der Rotationen einer Diedergruppe SD_n (für *spezielle Diedergruppe*, die nur Rotationen enthält) anhand der *Erzeugerrotation* $r := r_1$ ausgedrückt werden:

$$SD_n = \{r^k \mid k \in \mathbb{Z}; 1 \leq k \leq n\} \quad (1.7)$$

Hierbei ist anzumerken, dass r^n , also das n -malige Ausführen der Rotation r der Identitätsoperation id entspricht.

Wird die Orientierung durch eine Spiegelung σ einmal verändert, kann das Polyeder wiederum durch Rotationen in alle möglichen Positionen gebracht werden. Es können also alle Spiegelungen als Verknüpfung *einer* Spiegelung mit den Rotationen dargestellt werden (vgl. auch Tabelle 1.1): Die Menge der Spiegelungen ist die Menge aller Symmetrieoperationen ohne die Menge der Rotationen $(D_n \setminus SD_n)$.

³gesprochen "Di-eder", was so viel wie Zweiflächer bedeutet

$$D_n \setminus SD_n = \sigma SD_n \quad (1.8)$$

Die Menge D_n der Diedergruppe (D_n, \circ) kann also allgemein zusammengefasst werden als:

$$D_n = \left\{ \sigma^l \circ r^k \mid k \in \mathbb{Z}; 1 \leq k \leq n; l \in \{0, 1\} \right\} \quad (1.9)$$

oder kurz

$$D_n = SD_n \cup \sigma SD_n \quad (1.10)$$

2. Symmetrieoperationen in 3D

Nachdem in Abschnitt 1 die Grundlagen zu den Symmetriegruppen erarbeitet wurden, werden in diesem Kapitel die Symmetriegruppen in drei Dimensionen beschrieben. Hierbei ist anzumerken, dass Rotationen nicht wie bisher um einen Punkt stattfinden, sondern um eine Gerade, die *Rotationsachse*. Gespiegelt wird nicht mehr an Geraden, sondern an Ebenen.

2.1. Symmetriegruppe des Tetraeders

Wie auch das Dreieck bei den Polygonen ist das Tetraeder die simpelste Form der *Polyeder*⁴. Es besitzt vier Seiten (daher der Name "Tetraeder", "Vierflächer") in Form von regelmässigen Dreiecken (siehe Abb. 2.1).

Das Tetraeder besitzt folgende Symmetrieoperationen:

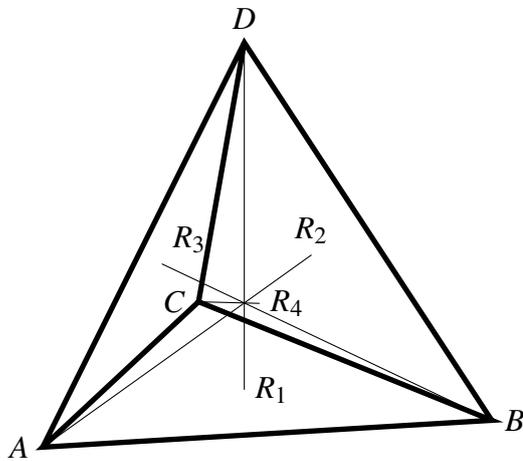
- 1) *id*, die Identitätsoperation "nichts machen"
- 2-9) 4 · 2 Rotationen um je 120° und 240° um die Rotationsachsen R_1, R_2, R_3 und R_4 , welche je durch die Seitenmittelpunkte und die gegenüberliegenden Ecken verlaufen (siehe Abb. 2.1a).
- 10-12) 3 Rotationen um je 180° um die Rotationsachsen R_5, R_6 und R_7 , welche durch die Kantenmittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seiten verlaufen (siehe Abb. 2.1b).
- 13-18) 6 Spiegelungen an den Spiegelungsebenen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$ und ζ_6 , die jeweils durch eine Kante und den ihr gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt verlaufen (siehe Abb. 2.1c).
- 19-24) 3 · 2 Drehspiegelungen um je 90° und 270° um die Drehspiegelungsebenen/-achsen⁵ DS_1, DS_2 und DS_3 (siehe Abb. 2.1d).

Das Tetraeder besitzt also 24 verschiedene Symmetrien, was der maximal möglichen Anzahl Symmetrien $4!$ entspricht (siehe Satz 1.1).

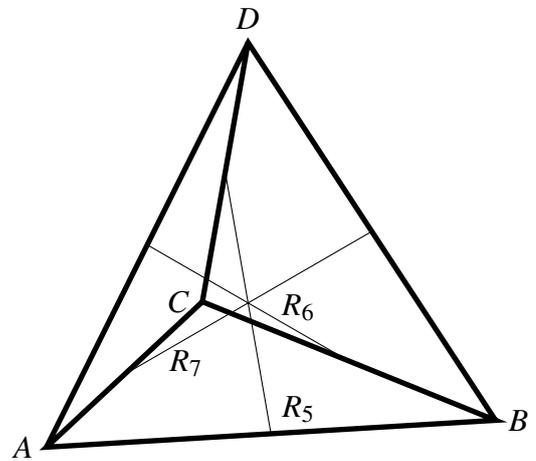
Die Symmetriegruppe des Tetraeders enthält alle möglichen Permutationen seiner vier Ecken und wird als (S_4, \circ) beschrieben (vgl. Abschnitt 3.2).

⁴griech. "Vielflächer"

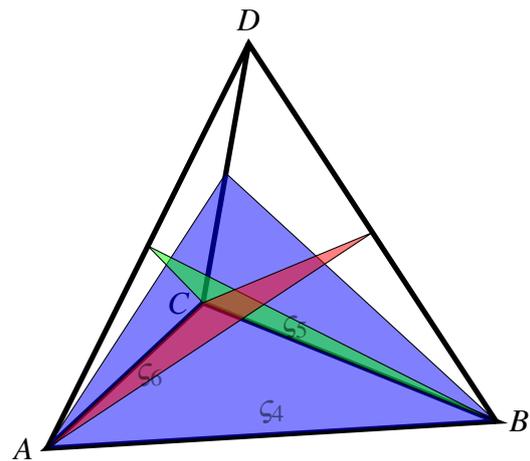
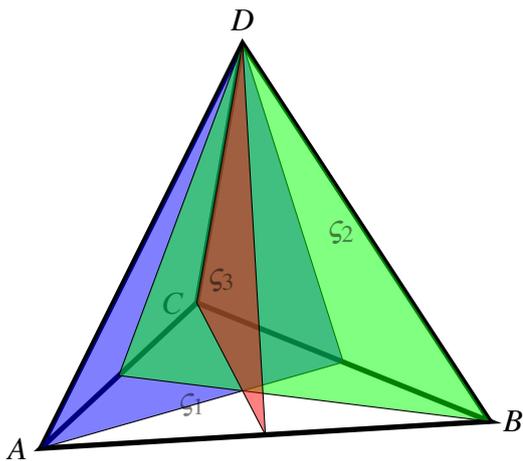
⁵Bei der Drehspiegelung wird das Tetraeder zuerst an der Ebene gespiegelt und dann um die Achse gedreht.



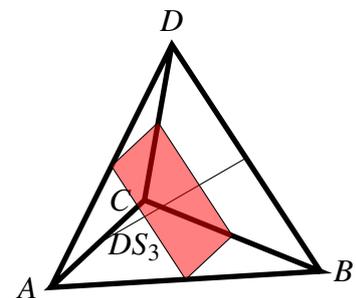
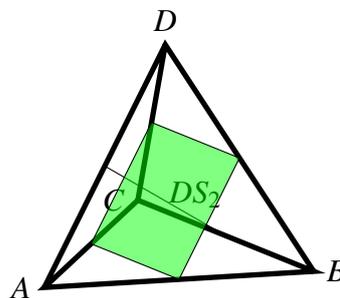
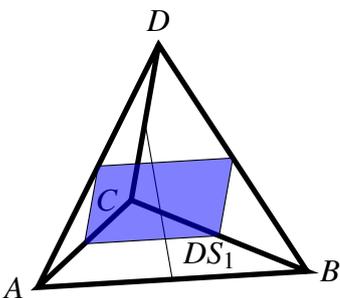
(a) Mittelsenkrechten als Rotationsachsen eines Tetraeders



(b) Rotationsachsen durch die Kantenmittelpunkte



(c) Spiegelungsebenen eines Tetraeders



(d) Drehspiegelungen eines Tetraeders

Abbildung 2.1: Symmetrieeoperationen eines Tetraeders

2.2. Symmetriegruppe des Würfels

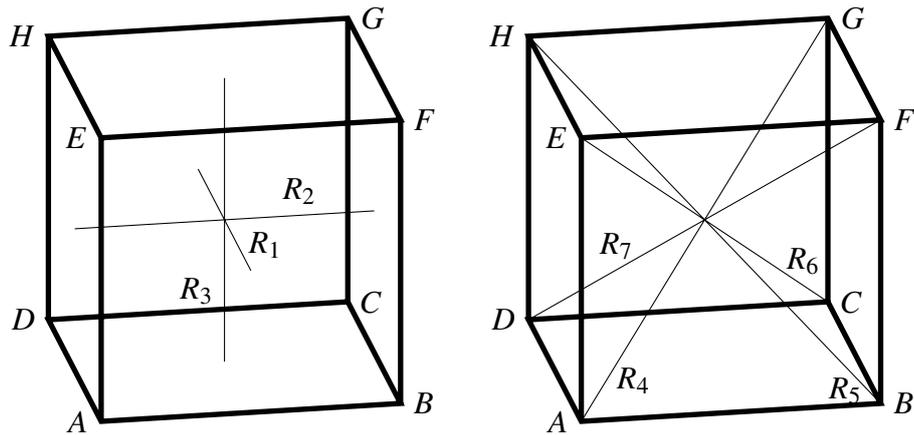
Ein Würfel, wie in Abb. 2.2 abgebildet, besitzt folgende Symmetrieoperationen:

- 1) id , die Identitätsoperation "nichts machen"
- 2-10) $3 \cdot 3$ Rotationen um je 90° , 180° und 270° um die Rotationsachsen R_1 , R_2 und R_3 , welche je durch die Seitenmittelpunkte von gegenüberliegenden Seiten verlaufen (siehe Abb. 2.2a)
- 11-18) $4 \cdot 2$ Rotationen um je 120° und 240° um die Rotationsachsen R_4 , R_5 , R_6 und R_7 , welche je durch zwei gegenüberliegende Ecken verlaufen (siehe Abb. 2.2b)
- 19-24) $6 \cdot 1$ Rotationen um 180° um die Rotationsachsen R_8 , R_9 , R_{10} , R_{11} , R_{12} und R_{13} , welche durch je die Kantenmittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seiten verlaufen (siehe Abb. 2.2c)
- 25-48) die Operationen oben kombiniert mit einer (Punkt-)Spiegelung

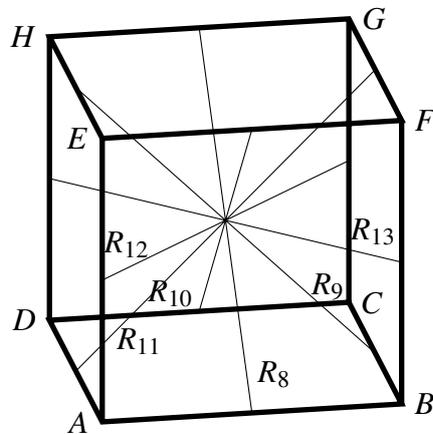
┌ Dies sind bereits alle Symmetrieoperationen des Würfels, was sich folgendermaßen zeigen lässt (vgl. Abb. 2.3):

- (a) um Punkt A auszuwählen, gibt es 8 Möglichkeiten
- (b) um Punkt B neben Punkt A auszuwählen, gibt es noch 3 Möglichkeiten
- (c) um Punkt D neben Punkt A auszuwählen, gibt es noch 2 Möglichkeiten
- (d) um Punkt E neben Punkt A auszuwählen, gibt es noch eine Möglichkeit
- (e) den Seiten $\square ABCD$, $\square AEHD$ und $\square ABFE$ fehlt nur noch je ein Punkt, welcher dadurch eindeutig gegeben ist
- (f) nun fehlt noch Punkt G , welcher ebenfalls eindeutig gegeben ist

⇒ Es gibt $8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ Möglichkeiten, den Würfel anzuordnen. Somit besitzt der Würfel auch genau 48 Symmetrieoperationen. ┘



(a) Rotationsachsen durch die Seitenmittelpunkte (b) Rotationsachsen durch die Eckpunkte



(c) Rotationsachsen durch die Kantenmittelpunkte

Abbildung 2.2: Rotationsachsen eines Würfels

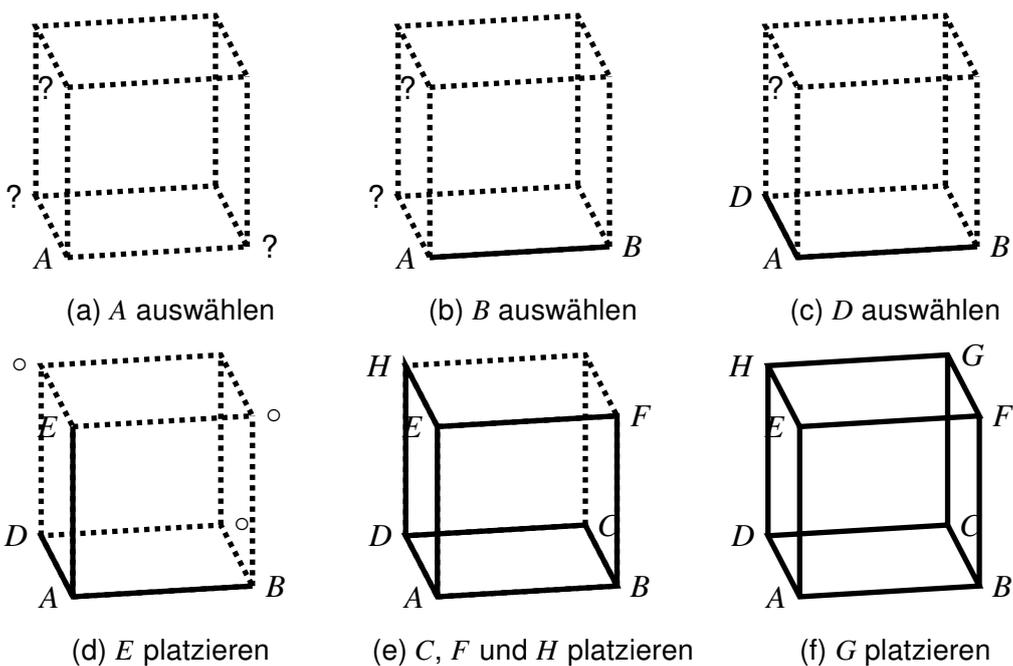


Abbildung 2.3: Herleitung zur Anzahl möglicher Anordnungen eines Würfels

3. Symmetrieoperationen in mehr als 3 Dimensionen

Um das "Tetraeder" und den "Würfel" in mehr als drei Dimensionen zu definieren, sind zuerst einige Beobachtungen dieser Figuren in tieferen Dimensionen (0-3) zu beschreiben.

3.1. Orientierung von mehrdimensionalen Figuren

Bei der Frage der Symmetrieoperationen spielt die Orientierung eine wichtige Rolle. Bei Polygonen (2D), gibt es zwei mögliche Orientierungen (vgl. Abschnitt 1.2.2).

┌ Bei den möglichen Orientierungen in 2D in Abb. 3.1 kann nun eine weitere Dimension (C) hinzugefügt werden, sodass ein dreidimensionales Objekt entsteht. Für C gibt es jeweils zwei verschiedene Orte, wo dieses platziert werden kann: "vor" oder "hinter" der Papierebene. Je nachdem, wo C platziert wird, ist die Orientierung der 3D-Figur positiv oder negativ. Es entscheidet also ausschliesslich die Platzierung von C über die Orientierung der 3D-Figur.

Wird derselbe Prozess vom dreidimensionalen in den vierdimensionalen Raum durchgeführt, so kann auch eine in 3D negativ orientierte Figur, wenn sie um eine Dimension erweitert wird, in 4D sowohl positiv als auch negativ sein. Daraus ergibt sich, dass es auch in vier Dimensionen nur zwei mögliche Orientierungen gibt. ┘

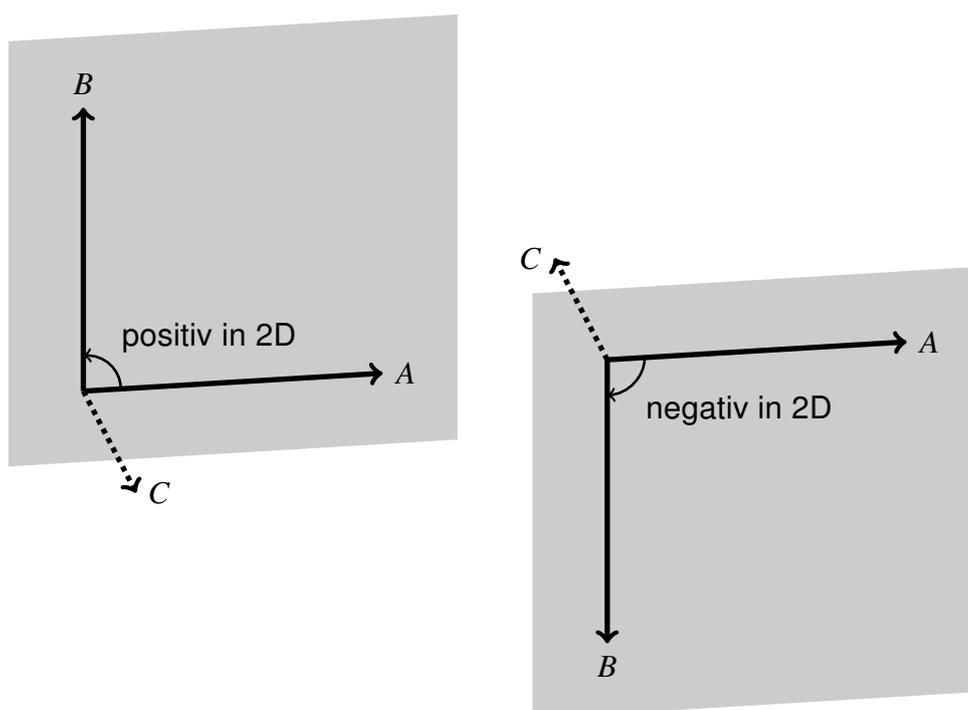


Abbildung 3.1: verschiedene Orientierung in 2D, gleiche Orientierung in 3D

3.2. Symmetriegruppen von “Hypertetraedern”

3.2.1. Das Simplex

Das Tetraeder sieht in den uns bereits bekannten ersten drei Dimensionen folgendermassen aus: (vgl. Abb. 3.2)

- In der 0-ten (“nullten”) Dimension, also ohne jegliche Richtung, ist das “Tetraeder” bloss ein Punkt A .
- In der 1-ten Dimension, in der es genau eine Richtung gibt, besteht das “Tetraeder” aus zwei Punkten, A und B , die mit einer Kante verbunden sind. Diese Figur ist besser bekannt als Strecke.
- In der 2-ten Dimension, in der zwei Richtungen existieren, besteht das “Tetraeder” aus drei Punkten A , B und C die alle untereinander mit Kanten verbunden sind. Diese Form ist besser bekannt als Dreieck.
- In der 3-ten Dimension, in der drei Richtungen existieren, besteht das *Tetraeder* aus vier Punkten A , B , C und D , die wiederum alle miteinander durch Kanten verbunden sind.

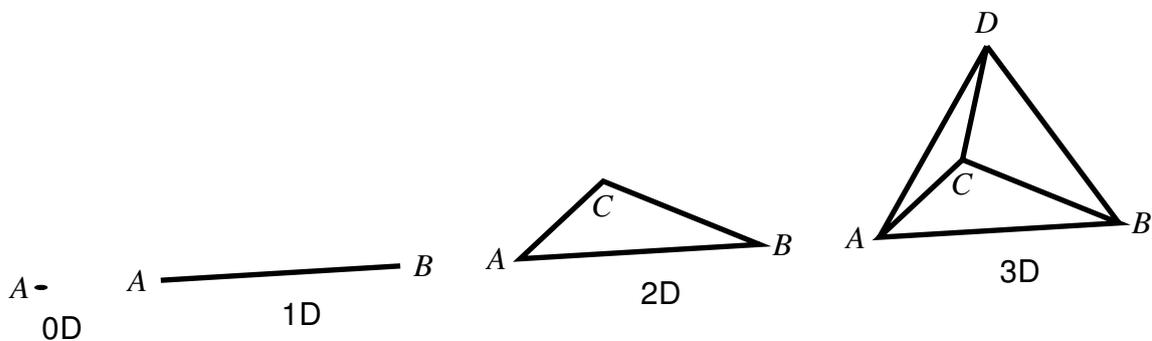


Abbildung 3.2: “Tetraeder” im 0-3-dimensionalen Raum

□ Es lassen sich also folgende Beobachtungen festhalten:

- Die “Tetraeder” besitzen in der n -ten Dimension $n + 1$ Eckpunkte.
- Alle Eckpunkte der “Tetraeder” sind mit allen anderen Eckpunkten des Tetraeders verbunden.

Diese Beobachtungen reichen bereits aus, um das allgemeine “Tetraeder”, das *Simplex* zu definieren:

Definition 3.1:

Das Simplex im n -dimensionalen Raum ist eine konvexe^a Figur aus $n + 1$ Eckpunkten, welche alle miteinander durch gleichlange Kanten verbunden sind.

^aEine Figur ist *konvex*, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte der Figur ebenfalls vollständig in der Figur liegt.

┘

3.2.2. Anzahl Symmetrien des Simplex

┐ Die Anzahl der Symmetrien in einem Simplex lässt sich wie folgt herleiten:

- um den ersten Eckpunkt P_1 des Simplex zu platzieren, gibt es dafür $n + 1$ Möglichkeiten
- um den zweiten Eckpunkt P_2 neben dem ersten Eckpunkt P_1 zu platzieren, gibt es n Möglichkeiten, da alle n noch zu platzierenden Eckpunkte Nachbarn von P_1 sind (siehe Definition 3.1)
- um den dritten Eckpunkt P_3 zu platzieren, gibt es dafür noch $n - 1$ Möglichkeiten
- dies wird wiederholt, bis es, um den Eckpunkt P_n zu platzieren, noch zwei Möglichkeiten gibt und, um den Eckpunkt $P_{(n+1)}$ zu platzieren, noch eine.

Satz 3.1:

Die Anzahl der Symmetrien eines Simplex im n -dimensionalen Raum beträgt

$$(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = (n + 1)!$$

Die Anzahl Symmetrien des Simplex stimmt also mit der maximal möglichen Anzahl Symmetrien einer Figur mit $n + 1$ Eckpunkten überein und ist somit maximal bzw. entspricht der Anzahl der Permutationen der Eckpunkte (siehe Satz 1.1). Die Symmetriegruppe eines n -dimensionalen Simplex wird als (S_{n+1}, \circ) beschrieben. ┘

Die *symmetrische Gruppe*⁶ (S_k, \circ) beinhaltet alle möglichen Permutationen von k Elementen und besitzt als Verknüpfung das Hintereinanderausführen dieser Permutationen. Im Falle des n -dimensionalen Simplex entsprechen die k Elemente den $n + 1$ Eckpunkten des Simplex.

⁶≠ Symmetriegruppe!

3.3. Symmetriegruppen von Hyperwürfeln

3.3.1. Der Hyperwürfel

Auch der "Würfel" lässt sich in den uns bekannten ersten vier Dimensionen (0D-3D) gut beschreiben. Er sieht folgendermassen aus (vgl. Abb. 3.3a)

- In der 0-ten Dimension, also ohne jegliche Richtung, ist der "Würfel" bloss ein Punkt A .
- In der 1-ten Dimension, in der es genau eine Richtung gibt, besteht der "Würfel" aus zwei Punkten, A und B , die mit einer Kante verbunden sind. Diese Figur ist besser bekannt als Strecke.
- In der 2-ten Dimension, in der zwei Richtungen existieren, besteht der "Würfel" aus vier Punkten A , B , C und D , die in dieser Reihenfolge miteinander verbunden sind. Diese Figur ist besser bekannt als das Quadrat.
- In der 3-ten Dimension, in der drei Richtungen existieren, besteht der Würfel aus den acht Punkten A , B , C , D , E , F , G und H . Hier ist je ein Punkt des Quadrats $\square ABCD$ mit einem Punkt des Quadrats $\square EFGH$ verbunden.

Allgemein kommt der "Würfel" in der n -ten Dimension zustande, indem man von zwei Würfeln der $(n-1)$ -ten Dimension die übereinstimmenden Eckpunkte verbindet (siehe Abb. 3.3).

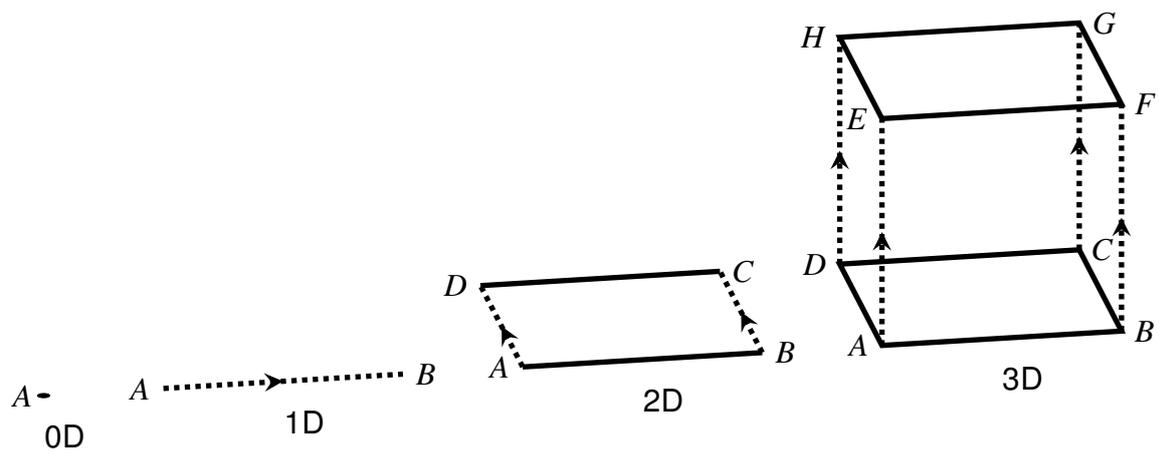
Durch diese Überlegungen lässt sich der *Hyperwürfel* wie folgt definieren:

Definition 3.2:

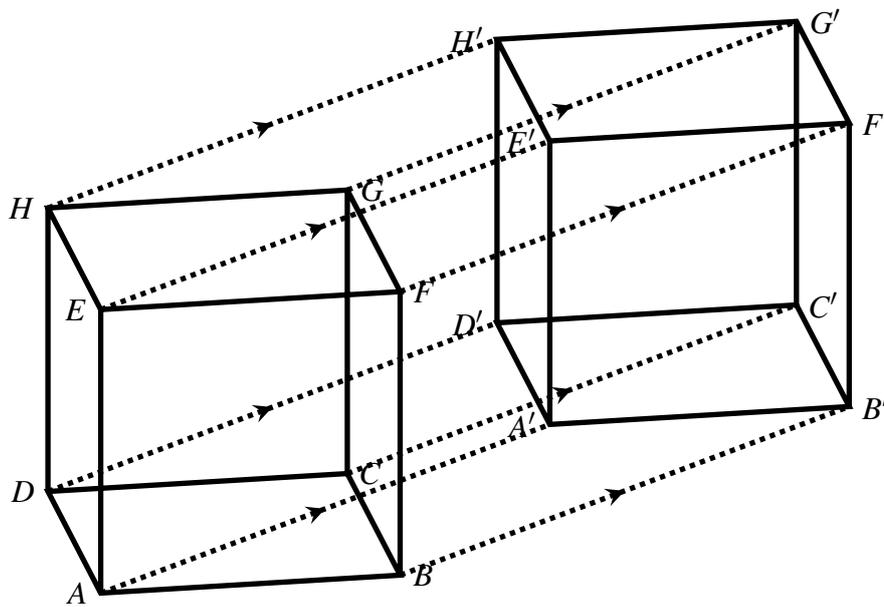
Ein n -dimensionaler Hyperwürfel entsteht, wenn ein $(n-1)$ -dimensionaler Hyperwürfel mit einem zweiten in der n -ten Dimension verschobenen $(n-1)$ -dimensionalen Hyperwürfel verbunden wird. Der 0-dimensionale Hyperwürfel ist ein Punkt. ┘

3.3.2. Anzahl Symmetrien des Hyperwürfels

Ein Hyperwürfel der n -ten Dimension hat doppelt so viele Eckpunkte wie ein Würfel der $(n-1)$ -ten Dimension. Der 0D-Hyperwürfel besitzt $1 = 2^0$ Eckpunkte, der 1D-Hyperwürfel $2 = 2^1$, der 2D-Hyperwürfel $4 = 2^2$ usw. Es ergibt sich also für den n -dimensionalen Hyperwürfel eine Anzahl von 2^n Eckpunkten.



(a) Hyperwürfel im 0-3-dimensionalen Raum



(b) 4D-Hyperwürfel

Abbildung 3.3: verschiedene Hyperwürfel

Satz 3.2:

Ein n -dimensionaler Hyperwürfel hat 2^n Eckpunkte.

Ausserdem lässt sich aus Definition 3.2 folgendes ableiten:

Es sei k die Anzahl anderer Eckpunkte, mit der jeder Eckpunkt eines Hyperwürfels der n -ten Dimension verbunden ist. In der $(n+1)$ -ten Dimension ist jeder Eckpunkt mit $k+1$ anderen Eckpunkten verbunden, da beim Übergang von der n ten zur $(n+1)$ -ten Dimension jeder Eckpunkt genau mit einem weiteren Eckpunkt verbunden wird (vgl. auch Abb. 3.3).

In *zwei* Dimensionen ist jeder Eckpunkt mit $k=2$ anderen Eckpunkten verbunden, in *drei* Dimensionen mit $k=3$. Daraus ergibt sich:

Satz 3.3:

Jeder Eckpunkt eines n -dimensionalen Hyperwürfels ist mit genau n anderen Eckpunkten verbunden.

Ein Würfel in drei Dimensionen ist eindeutig gegeben, wenn ein Eckpunkt mit drei weiteren Eckpunkten verbunden ist (vgl. Abschnitt 2.2 und Abb. 2.3). Gemäss Abschnitt 3.1 ist es möglich, jede solche Konstruktion (ein Eckpunkt verbunden mit drei weiteren Eckpunkten) auf zwei verschiedene Arten um eine Dimension zu erweitern (positive oder negative Orientierung). Der 4D-Hyperwürfel ist also durch einen Eckpunkt, der mit *vier* weiteren Eckpunkten verbunden ist, eindeutig gegeben. Dasselbe gilt auch für den Übergang zu weiteren Dimensionen. Ein Hyperwürfel im n -dimensionalen Raum ist also durch einen Eckpunkt, verbunden mit n anderen Eckpunkten, eindeutig definiert. Für die Anordnung dieser n anderen Eckpunkte gibt es $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

Für die Platzierung des ersten Eckpunkts eines n -dimensionalen Hyperwürfels gibt es nach Satz 3.2 eine Anzahl von 2^n Möglichkeiten. Um die weiteren n benachbarten Eckpunkte zu platzieren, gibt es noch $n!$ Möglichkeiten. Es ergibt sich also:

Satz 3.4:

Die Anzahl Symmetrien eines n -dimensionalen Hyperwürfels beträgt $2^n \cdot n!$.

┘

Die Symmetriegruppe des Hyperwürfels wird als die *Hyperoktaedergruppe* (O_n, \circ) bezeichnet⁷.

⁷Die Bezeichnung O_n stammt vom Hyperoktaeder, das dem Hyperwürfel dual ist und somit die-

selbe Symmetrie aufweist. Was Dualität bedeutet, wird im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht erläutert.

Ausblick

In dieser Arbeit werden viele Verknüpfungen und verschiedene Blickwinkel auf das Thema der mehrdimensionalen Hyperwürfel und Simplexe dargestellt und graphisch anschaulich gemacht. Das Thema bietet aber noch einiges mehr. Nicht nur die Gruppentheorie, sondern zum Beispiel auch die Graphentheorie erlaubt weitere spannende Analysen und Diskussionen. Eine Vermutung, die im Prozess der Ausarbeitung dieser Arbeit auftauchte, war zum Beispiel, dass die Beobachtung der Überkreuzung der Kanten aus Abb. 1.3c verallgemeinerbar sei, sodass im ein n -dimensionaler Hyperwürfel immer auf der $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene als planarer Graph dargestellt werden könne. Dieser Vermutung wurde aber nicht weiter nachgegangen.

Für die verschiedenen Gruppentypen kann die Gruppentheorie sicherlich noch stärker vertieft werden. So kann zum Beispiel eine genauere Untersuchung der Verknüpfungen von Symmetrieoperationen und deren Regelmässigkeit durchgeführt werden.

Das Thema Gruppentheorie ist ein wichtiges Thema der Mathematik, das aber auch in diversen Bereichen der Physik oder Chemie zur Anwendung kommt. So gibt es die sogenannte Monstergruppe, welche ungefähr $8 \cdot 10^{53}$ Elemente besitzt und beispielsweise in der Stringtheorie als Symmetriegruppe auftaucht.

Auch das Verständnis und die Bearbeitung von mehrdimensionalen Objekten ist insbesondere für die Mathematik im Studium von Vektorräumen oder anderen algebraischen Strukturen relevant und bildet unter anderem die Grundlage für das Verständnis der höheren Mathematik.

Literatur

Glosauer, Tobias, *Elementar(st)e Gruppentheorie*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016.

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1.1. Symmetrieoperationen eines gleichschenkligen Dreiecks	8
1.2. Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks	9
1.4. Möglichkeiten zur Platzierung der Ecken eines Polygons und Definitivon der Orientierung in 2D	15
2.1. Symmetrieoperationen eines Tetraeders	19
2.2. Rotationsachsen eines Würfels	21
2.3. Herleitung zur Anzahl möglicher Anordnungen eines Würfels	21
3.1. verschiedene Orientierung in 2D, gleiche Orientierung in 3D	22
3.2. "Tetraeder" im 0-3-dimensionalen Raum	23
3.3. verschiedene Hyperwürfel	26
I.1. Der Würfel im Koordinatensystem	32
I.2. Drehung eines Vektors \vec{v} um den Winkel θ	34
I.3. Spiegelung eines Vektors \vec{v} an der Geraden durch den Ursprung mit dem Winkel θ zur Horizontalen	35

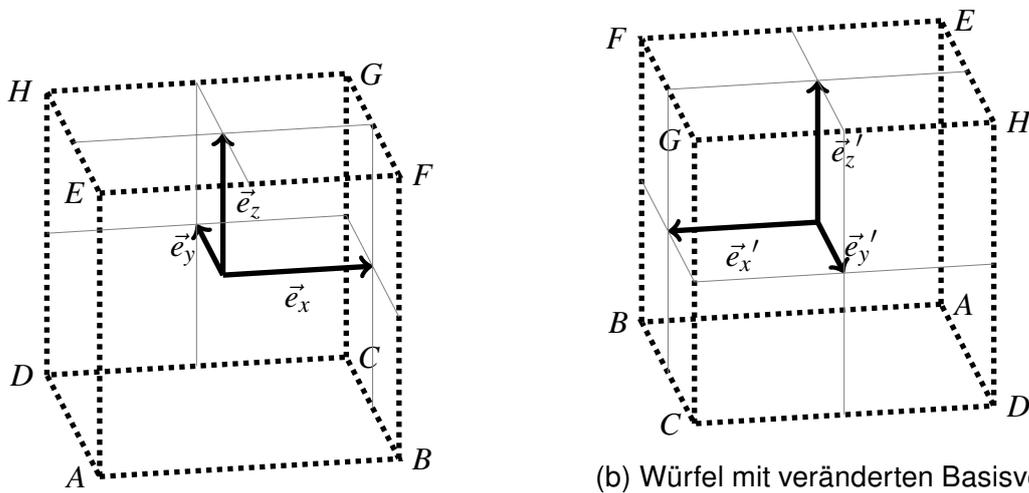
Tabellenverzeichnis

1.1. Verknüpfungstafel der Gruppe (D_3, \circ)	10
--	----

Anhang I Symmetriegruppen und Matrizen

Zusätzlich zu den bereits behandelten Darstellungen von Symmetrieoperationen mittels Permutationen können diese auch mit Matrizen dargestellt werden. Hierzu stellt man das Objekt (hier nur (Hyper-)Würfel, da die Zahlen simpler sind) in ein Koordinatensystem (siehe Abb. I.1 a).

Jeder Punkt des Würfels (oder auch jeder anderer 3D-Figur) kann als Linearkombination⁸ der Basisvektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden. Daher sind auch bloss diese Vektoren für die weitere Betrachtung relevant.



(a) Würfel im Koordinatensystem mit den Basisvektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3

(b) Würfel mit veränderten Basisvektoren nach Anwendung der Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Abbildung I.1: Der Würfel im Koordinatensystem

Jede Symmetrieoperation kann durch eine Matrix dargestellt werden. Die Multiplikation der Basisvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z mit dieser Matrix ergibt die neuen Basisvektoren \vec{e}'_x , \vec{e}'_y und \vec{e}'_z . So entspricht die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ einer Drehung um 180° um die z-Achse. Die neuen Basisvektoren ergeben sich folgendermassen:

⁸Ein Vektor \vec{v} lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ausdrücken, wenn gilt:

$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{e}_n$$

$$\vec{e}'_x = \mathbf{M} \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$\vec{e}'_y = \mathbf{M} \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\vec{e}'_z = \mathbf{M} \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Die Basisvektoren können auch spaltenweise als Matrix $(\vec{e}_x \ \vec{e}_y \ \vec{e}_z)$ angeordnet und dann multipliziert werden. Das Ergebnis für die neuen Basisvektoren ist dasselbe:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_x & \vec{e}'_y & \vec{e}'_z \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Die Matrix $(e_x \ e_y \ e_z)$, die spaltenweise die Basisvektoren e_x , e_y und e_z enthält, ist auch die Einheitsmatrix \mathbf{E}_3 , die an einer Matrix \mathbf{M} bei der Matrixmultiplikation nichts verändert. Daher gilt folgendes:

Satz I.1:

Jede Symmetrieoperation im n -dimensionalen Raum kann als Matrix \mathbf{M} dargestellt werden, welche die Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ auf die Vektoren $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ abbildet:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \dots & \vec{e}'_n \end{pmatrix}$$

Somit kann auch jede Symmetriegruppe mit Matrizen dargestellt werden. Die Menge der Symmetrieoperationen bildet hierbei die Menge der Matrizen, die eine solche darstellen. Die innere Verknüpfung ist die Matrixmultiplikation.

I.1 Dreh- und Spiegelungsmatrizen in 2D

Diedergruppen enthalten sowohl Rotationen als auch Spiegelungen (siehe Abschnitt 1.2.3). Diese können mittels Matrizen in Abhängigkeit eines Winkels dargestellt und die damit zusammenhängenden Symmetriegruppen beschrieben werden.

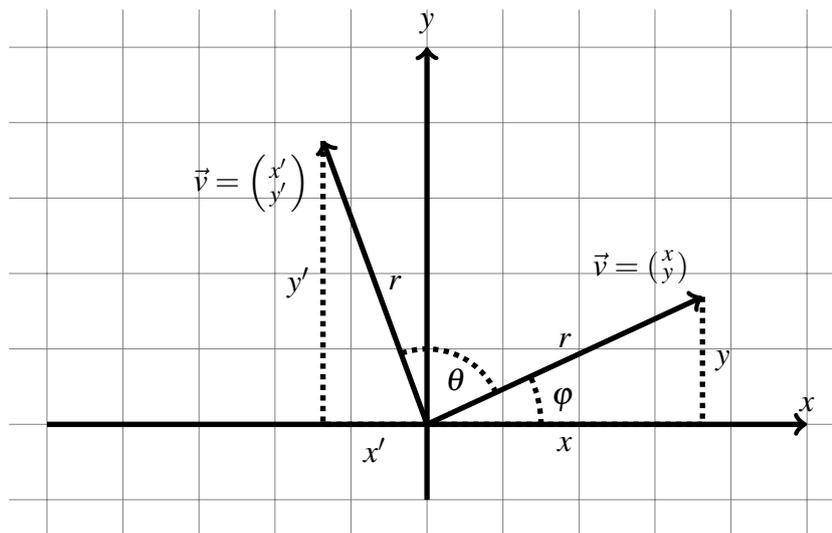


Abbildung I.2: Drehung eines Vektors \vec{v} um den Winkel θ

Aus Abb. I.2 gehen folgende Zusammenhänge hervor:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi + \theta) \\ r \cdot \sin(\varphi + \theta) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

(1.6)

Mithilfe der Additionstheoreme

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (1.7)$$

und

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (1.8)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi + \theta) \\ r \cdot \sin(\varphi + \theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cos(\theta) - r \cdot \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cdot \cos(\varphi) \sin(\theta) + r \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

Die Rotation eines beliebigen Vektors \vec{v} um einen Winkel θ kann also durch die Matrix $\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Ähnliche Beobachtungen können für die Spiegelung an einer beliebigen Achse unternommen werden.

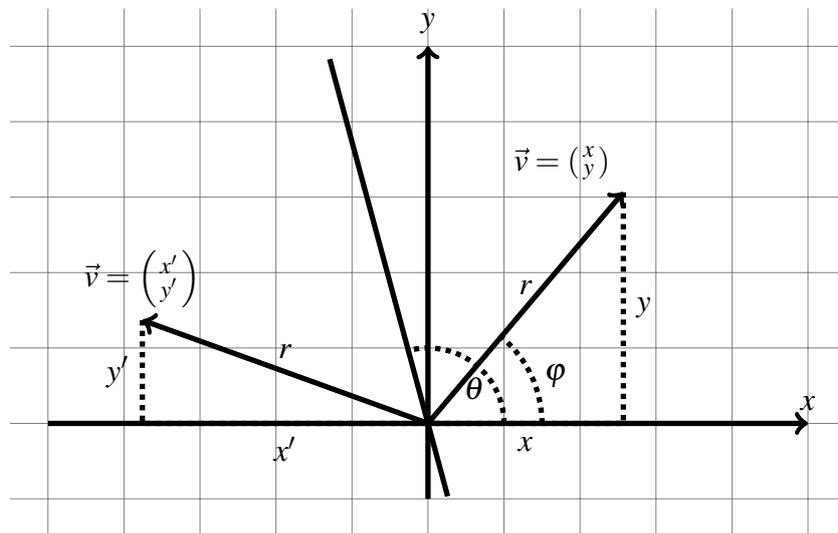


Abbildung I.3: Spiegelung eines Vektors \vec{v} an der Geraden durch den Ursprung mit dem Winkel θ zur Horizontalen

Wie schon aus Abb. I.2 ergeben sich auch aus Abb. I.3 die Zusammenhänge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta + (\theta - \varphi)) \\ r \cdot \sin(\theta + (\theta - \varphi)) \end{pmatrix} \tag{I.10}$$

Daraus ergibt sich⁹:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos(2\theta - \varphi) \\ r \cdot \sin(2\theta - \varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos(2\theta) \cos(\varphi) + \sin(2\theta) \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(2\theta) \cos(\varphi) - \cos(2\theta) \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

Matrizen der Form $\sigma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ beschreiben also die Spiegelung eines beliebigen Vektors \vec{v} an der Geraden, die durch den Ursprung verläuft, und den Winkel θ zur Horizontalen (x -Achse) aufweist.

Die Diedergruppen können also folgendermassen notiert werden (vgl. auch Abschnitt 1.2.3 und Gleichungen (1.9) und (1.10)):

$$D_n = \left\{ \mathbf{R} \left(\frac{k \cdot 2\pi}{n} \right) \mid k \in \mathbb{Z}; 1 \leq k \leq n \right\} \cup \left\{ \sigma \left(\frac{k \cdot \pi}{n} \right) \mid k \in \mathbb{Z}; 1 \leq k \leq n \right\} \tag{1.12}$$

┘

I.2 Orientierung von Symmetrieoperationen

Eine beliebige Symmetrieoperation im n -dimensionalen Raum kann nach Satz I.1 als $n \times n$ -Matrix dargestellt werden. Diese Symmetrieoperation kann entweder *orientierungserhaltend* oder *nicht orientierungserhaltend* sein.

⁹mithilfe der Additionstheoreme aus Gleichungen (I.7) und (I.8)

Definition I.1:

Die Orientierung einer Symmetrieoperation entspricht dem Vorzeichen der Determinante der dazugehörigen Matrix \mathbf{M} .^a

$$\text{Orientierung}(\mathbf{M}) = \text{sgn}(\det(\mathbf{M}))$$

^aDie Funktion $\text{sgn}(x)$ gibt das Vorzeichen einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ an und ist definiert als:

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Diedergruppe besteht nach Gleichung (I.12) und Abschnitt 1.2.3 aus *orientierungserhaltenden* Rotationen, die durch die Matrizen $\mathbf{R}(\theta)$ dargestellt werden können, und die *nicht orientierungserhaltenden* Spiegelungen, die durch die Matrizen $\sigma(\theta)$ dargestellt werden können. Dass die Orientierung bei Rotationen erhalten und bei Spiegelungen nicht erhalten bleibt, lässt sich folgendermassen zeigen:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{R}(\theta)) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) - \sin(\theta) \cdot (-\sin(\theta)) \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{I.13}$$

und

$$\begin{aligned} \det(\sigma(\theta)) &= \begin{vmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{vmatrix} \\ &= -\cos(2\theta) \cdot \cos(2\theta) - \sin(2\theta) \cdot \sin(2\theta) \\ &= -(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)) \\ &= -1 \end{aligned} \tag{I.14}$$

Die Determinante von Matrizen, die Symmetrieoperationen repräsentieren, kann also nur die Werte -1 oder 1 annehmen. Nach Definition I.1 und Gleichungen (I.13) und (I.14) haben alle Rotationsmatrizen die Determinante 1 und alle Spiegelungsmatrizen die Determinante -1 .